BÀI 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

1. Hàm số liên tục tại một điểm

Định nghĩa 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 ta nói hàm số gián đoạn tại x_0.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng

Định nghĩa 2.

- Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.
- Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên $(a;b)$ và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$,

$\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

3. Các định lý cơ bản

Định lý 1.

a) Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập $\mathbb{R}$.

b) Hàm số phân thức hữu tỉ, hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

Định lý 2.

Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục tại x_0. Khi đó:

a) Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x).g(x)$ liên tục tại x_0.

b) Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Định lý 3. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(\mathrm{b}) < 0$ thì tồn tại ít nhất một số $c \in (a;b)$ sao cho $f(\mathrm{c}) = 0$.

Chú ý: Ta có thể phát biểu định lý 3 theo cách khác như sau:

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(\mathrm{b}) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(a;b)$.

DẠNG 1: XÉT TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Phương pháp giải: Để xét tính liên tục của hàm số $y = f\left(x\right)$ tại điểm x_0 ta thực hiện các bước như sau:

- Tìm tập xác định D của hàm số.
- Kiểm tra xem x_0 có thuộc tập xác định D? Nếu $x_0 \in D$ thì thực hiện bước kế tiếp, nếu $x_0 \notin D$ thì kết luận hàm số gián đoạn tại x_0.
- Tính $f\left(x_0\right)$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$.
- So sánh và kết luận:
  - ✓ Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right) = f\left(x_0\right)$ thì hàm số liên tục tại x_0.
  - ✓ Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right) \neq f\left(x_0\right)$ hoặc không tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$ thì hàm số gián đoạn tại x_0.

Chú ý:

1. Nếu hàm số liên tục tại x_0 thì trước hết hàm số phải xác định tại điểm đó.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right) = a$.
3. Hàm số $f(x) = \begin{cases} A\left(x\right), & khi\ x \neq x_0 \\ B\left(x\right), & khi\ x = x_0 \end{cases}$ liên tục tại x_0 khi $\lim\limits_{x\to x_0} A\left(x\right) = B\left(x_0\right)$.
4. Hàm số $f(x) = \begin{cases} A\left(x\right), & khi\, x \geq x_0 \\ B\left(x\right), & khi\ x < x_0 \end{cases}$ liên tục tại x_0 khi $\lim\limits_{x\to x_0^+} A\left(x\right) = \lim\limits_{x\to x_0^-} B\left(x\right) = A\left(x_0\right)$.

Ví dụ 1: Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} & ,\ khi\, x \neq 2 \\ 1 & ,\ khi\ x = 2 \end{cases}$ tại $x = 2$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ và $x = 2 \in D$.

$f\left(2\right) = 1$.

$\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}{\left(x-2\right)\left(x-1\right)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{x-1} = 4$.

Vì $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right) \neq f\left(2\right)$ nên hàm số đã cho gián đoạn tại $x = 2$.

Ví dụ 2: Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-64}{x+8} & ,\ khi\ x < -8 \\ 2x+8 & ,\ khi\ x \geq -8 \end{cases}$ tại $x = -8$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ và $x=-8\in D$.

$f\left(-8\right)=2.(-8)+8=-8$.

$\lim\limits_{x\to -8^{+}} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -8^{+}}\left(2x+8\right)=-8$.

$\lim\limits_{x\to -8^{-}} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -8^{-}}\dfrac{x^2-64}{x+8}=\lim\limits_{x\to -8^{-}}\dfrac{\left(x-8\right)\left(x+8\right)}{x+8}=\lim\limits_{x\to -8^{-}}\left(x-8\right)=-16$.

Vì $\lim\limits_{x\to -8^{+}} f\left(x\right)\neq \lim\limits_{x\to -8^{-}} f\left(x\right)$ nên không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to -8} f\left(x\right)$.

Vậy hàm số đã cho gián đoạn tại $x=-8$.

Ví dụ 3: Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & , \quad khi\ x>1\\ \dfrac{1}{4}x & , \quad khi\ x\le 1\end{cases}$ tại $x=1$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ và $x=1\in D$.

$f\left(1\right)=\dfrac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x\to 1^{-}} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^{-}}\dfrac{1}{4}x=\dfrac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x\to 1^{+}} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^{+}}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^{+}}\dfrac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1^{+}}\dfrac{x-1}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1^{+}}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\dfrac{1}{4}$.

Nhận thấy $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^{+}} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^{-}} f\left(x\right)=\dfrac{1}{4}=f\left(1\right)$

Vậy hàm số đã cho liên tục tại $x=1$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}3x-5 & \text{khi} \quad x\le -2\\ ax-1 & \text{khi} \quad x>-2\end{cases}$. Với giá trị nào của a thì hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=-2$?

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ và $x=-2\in D$.

Ta có: $f\left(-2\right)=-11$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left(3x-5\right)=-11$

$\lim\limits_{x\to -2^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -2^+}\left(ax-1\right)=-2a-1$.

Để hàm số liên tục tại $x=-2$ thì $f\left(-2\right)=\lim\limits_{x\to -2^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -2^+} f\left(x\right)\Leftrightarrow -2a-1=-11\Leftrightarrow a=5$.

Vậy hàm số liên tục tại $x=-2$ khi $a=5$.

Ví dụ 5: Tìm các giá trị của m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{khi} \quad x<0\\ m+\dfrac{1-x}{1+x} & \text{khi} \quad x\ge 0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$?

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ và $x=0\in D$.

$f\left(0\right)=m+1$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(m+\dfrac{1-x}{1+x}\right)=m+1$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2x}{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=-1$.

Để hàm liên tục tại $x=0$ thì $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)=f\left(0\right)\Leftrightarrow m+1=-1\Leftrightarrow m=-2$.

Vậy $m=-2$ thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 6: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2} & khi \;\; x\ne 1\\ 2019m & khi \;\; x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$?

Lời giải

Hàm số xác định tại $x=1$.

Ta có $f(1)=2019m$. Tính $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}$.

Đặt $t=x-1$ thì $x=t+1$, $x\to1$ thì $t\to0$

$$\frac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}=\frac{\sqrt[3]{6t+1}-\sqrt{4t+1}}{t^2}=\frac{\sqrt[3]{6t+1}-(2t+1)}{t^2}+\frac{(2t+1)-\sqrt{4t+1}}{t^2}.$$

$$=\frac{6t+1-(8t^3+12t^2+6t+1)}{t^2\left[\sqrt[3]{(6t+1)^2}+(2t+1)\sqrt[3]{6t+1}+(2t+1)^2\right]}+\frac{(4t^2+4t+1)-(4\text{t}+1)}{t^2(2t+1+\sqrt{4t+1})}.$$

$$=\frac{-8t-12}{\left[\sqrt[3]{(6t+1)^2}+(2t+1)\sqrt[3]{6t+1}+(2t+1)^2\right]}+\frac{4}{(2t+1+\sqrt{4t+1})}.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}=\lim\limits_{t\to0}\left(\dfrac{-8t-12}{\left[\sqrt[3]{(6t+1)^2}+(2t+1)\sqrt[3]{6t+1}+(2t+1)^2\right]}+\dfrac{4}{(2t+1+\sqrt{4t+1})}\right)=-2$.

Để hàm số liên tục tại $x=1$ khi $f(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}\Leftrightarrow 2019m=-2\Leftrightarrow m=\dfrac{-2}{2019}$.

DẠNG 2: XÉT TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ TRÊN KHOẢNG, NỬA KHOẢNG, ĐOẠN

Phương pháp giải:

1. Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)\Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng $(a;b)$.
2. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[a;b\right]\Leftrightarrow f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$; $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$.

Ví dụ 7: Xét tính liên tục của hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}x^3+x+1 & \text{khi } x\ge1\\ 2x+4 & \text{khi } x<1\end{cases}$ trên tập xác định của nó.

Lời giải

+ TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có:

+ Trên khoảng $(-\infty;1)$: $f\left(x\right)=2x+4$ là hàm đa thức nên $f\left(x\right)$ liên tục trên $(-\infty;1)$.

+ Trên khoảng $(1;+\infty)$: $f\left(x\right)=x^2+x+1$ là hàm đa thức nên $f\left(x\right)$ liên tục trên $(1;+\infty)$.

+ Tại điểm $x_0=1$, ta có: $f(1)=1^3+1+1=3$;

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+4)=6$

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^3+x+1)=3$

Vì $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. Vậy hàm số không liên tục tại điểm $x_0=1$. Tóm lại $f\left(x\right)$ liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ và gián đoạn tại điểm $x_0=1$.

Ví dụ 8: Xét tính liên tục của hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x-3}{x-3} & khi\;\; x\neq 3\\ 4 & khi\;\; x=3\end{cases}$ trên tập xác định của nó.

Lời giải

+ TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

+ Nếu $x\neq 3$ thì $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$. Vì $f(x)$ là thương của 2 đa thức, đồng thời mẫu số $x-3\neq 0$ nên $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$. (1)

+ Nếu $x=3$ ta có $f(3)=4$ và

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+1)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+1)=4$$

Vì $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)=4$ nên $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=3$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 9: Tìm a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ với $f\left(x\right)=\begin{cases}2x+a & \text{khi}\;\; x\leq 1\\ \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi}\;\; x>1\end{cases}$.

Lời giải

+ Khi $x<1$ thì $f\left(x\right)=2x+a$ là hàm đa thức nên liên tục trên khoảng $\left(-\infty;1\right)$.

+ Khi $x>1$ thì $f\left(x\right)=\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}$ là hàm phân thức hữu tỉ xác định trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$ nên liên tục trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$.

+ Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x=1$, ta có:

* $f\left(1\right)=2+a$.

* $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+a)=2+a$.

* $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x^2+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+2)=3$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\Leftrightarrow a+2=3\Leftrightarrow a=1$.

Ví dụ 10: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{9-x}}{x} & , \ 0<x<9\\ m & , \ x=0\\ \dfrac{3}{x} & , \ x\geq 9\end{cases}$. Tìm m để $f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$.

Lời giải

+ TXĐ: $D=[0;+\infty)$.

+ Với $x\geq 9$ thì $f(x)=\dfrac{3}{x}$ là hàm phân thức hữu tỉ xác định trên nửa khoảng $[9;+\infty)$ nên liên tục trên nửa khoảng $[9;+\infty)$.

+ Với $0<x<9$ thì $f(x)=\dfrac{3-\sqrt{9-x}}{x}$ là hàm phân thức hữu tỉ xác định trên khoảng $(0;9)$ nên liên tục trên khoảng $(0;9)$.

+ Tại điểm $x=0$:

Ta có $f(0)=m$ và $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3-\sqrt{9-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{3+\sqrt{9-x}}=\dfrac{1}{6}$.

Vậy để hàm số liên tục trên $[0;+\infty)$ thì khi hàm số liên tục tại $x=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{6}$.

BÀI TẬP

Bài 1: Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-27}{3-x} & khi \ x\neq 3\\ -27 & khi \ x=3\end{cases}$ tại $x_0=3$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{2x-3}}{2-x} & khi\ x\neq 2\\ -1 & khi\ x=2\end{cases}$ tại $x_0=2$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{1-x} & khi\ x\neq 1\\ -\dfrac{1}{6} & khi\ x=1\end{cases}$ tại $x_0=1$

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} & khi\ x\neq \sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & khi\ x=\sqrt{2}\end{cases}$ tại $x_0=\sqrt{2}$

Bài 2: Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+5x+4}{x^3+1} & khi\ x>-1\\ 1 & khi\ x\leq -1\end{cases}$ tại $x_0=1$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2+5x+6} & khi\ x>-2\\ x+4 & khi\ x\leq -2\end{cases}$ tại $x_0=-2$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & khi\ x<1\\ -2x & khi\ x\geq 1\end{cases}$ tại $x_0=1$

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & khi\ x>1\\ \dfrac{1}{4}x & khi\ x\geq 1\end{cases}$ tại $x_0=1$

Bài 3: Xét tính liên tục của các hàm số sau trên R:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & khi\ x\neq 2\\ 5-x & khi\ x=2\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+8}{4x+8} & khi\ x\neq -2\\ 3 & khi\ x=-2\end{cases}$

Bài 4: Định a để hàm số sau liên tục:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x+2}{x-1} & khi\ x\neq -1\\ 3x+a & khi\ x=-1\end{cases}$ tại x_0 = 1

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{8+2x}-2}{\sqrt{x+2}} & khi\ x\neq -2\\ 3x+a^2-a & khi\ x=-2\end{cases}$ tại x_0 = -2

Bài 5: Định m để hàm số sau liên tục:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x} & khi\ x>2\\ mx+m+1 & khi\ x\leq 2\end{cases}$ tại x_0 = 2

b) $f(x)=\begin{cases}m^2x^2 & khi\ x\leq 2\\ (1-m)x & khi\ x>2\end{cases}$ tại x_0 = 2

CHÚC CÁC EM ÔN TẬP TỐT NHÉ !!!