

LƯU Ý CHUNG: TẤT CẢ CÁC DẠNG BÀI BÊN DƯỚI ĐÃ ĐƯỢC GIẢI MẪU KHI HỌC TẠI LỚP. HỌC SINH XEM LẠI VÀ HOÀN THÀNH CÁC BÀI DƯỚI ĐÂY.

A. ĐẠI SỐ

ⓐ Điều kiện của bất phương trình

Điều kiện của bất phương trình là điều kiện mà ẩn số phải thỏa mãn để các biểu thức ở hai vế của bất phương trình có nghĩa. Cụ thể, ta có ba trường hợp:

+ Dạng $\frac{1}{Q(x)}$ \longrightarrow Điều kiện có nghĩa: $Q(x) \neq 0$.

+ Dạng $\sqrt{P(x)}$ \longrightarrow Điều kiện có nghĩa: $P(x) \geq 0$.

+ Dạng $\frac{1}{\sqrt{Q(x)}}$ \longrightarrow Điều kiện có nghĩa: $Q(x) > 0$.

Phương pháp giải bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

a/ Giải bất phương trình bậc nhất một ẩn

☞ Phương pháp:

- Bước 1. Đặt điều kiện cho bất phương trình có nghĩa (nếu có)
- Bước 2. Chuyển vế và giải.
- Bước 3. Giao nghiệm với điều kiện được tập nghiệm S.

b/ Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

☞ Phương pháp:

- Bước 1. Đặt điều kiện cho hệ bất phương trình có nghĩa (nếu có).
- Bước 2. Giải từng bất phương trình của hệ rồi lấy giao các tập nghiệm thu được.
- Bước 3. Giao nghiệm với điều kiện được tập nghiệm S.

Giải và biện luận bất phương trình bậc nhất dạng: $ax + b < 0$.

Điều kiện		Kết quả tập nghiệm
$a > 0$		$S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$
$a < 0$		$S = \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$
$a = 0$	$b \geq 0$	$S = \emptyset$
	$b < 0$	$S = \mathbb{R}$

Lưu ý: Ta có thể giải tương tự cho các trường hợp: $ax + b > 0 \vee \begin{cases} ax + b \leq 0 \\ ax + b \geq 0 \end{cases}$

Bài tập

Bài 1. Tìm điều kiện của các bất phương trình sau:

$$1/ \quad \frac{1}{x} < 1 - \frac{1}{x+1}.$$

$$2/ \quad 2|x| - 1 + \sqrt[3]{x-1} \leq \frac{2x}{x+1}.$$

$$3/ \quad 3x + \frac{3}{\sqrt{x-2}} > 2 + \frac{x}{x-3}.$$

$$4/ \quad \frac{\sqrt{x-3}}{|x| - \sqrt{x-3}} \geq \sqrt{16-2x}.$$

$$5/ \quad \sqrt{\frac{x+1}{(x-2)^2}} < x+1.$$

$$6/ \quad \sqrt[3]{\frac{1+x}{x^2-3x+2}} - 2x^2 \leq 1.$$

Bài 2. Giải các bất phương trình sau:

$$1/ \quad -2x + \frac{3}{5} > \frac{3(2x-7)}{5} \quad 2/ \quad \frac{3x+1}{2} - \frac{x-2}{3} < \frac{1-2x}{4}$$

$$3/ \quad \frac{10-3x}{2} + 9 \leq \frac{2x-7}{4} - 2x \quad 4/ \quad (x+2)^3 \geq (x-1)^2 + 4$$

$$5/ \quad \sqrt{(x-4)^2(x+1)} > 0 \quad 6/ \quad (x-3)\sqrt{x-2} \leq 0$$

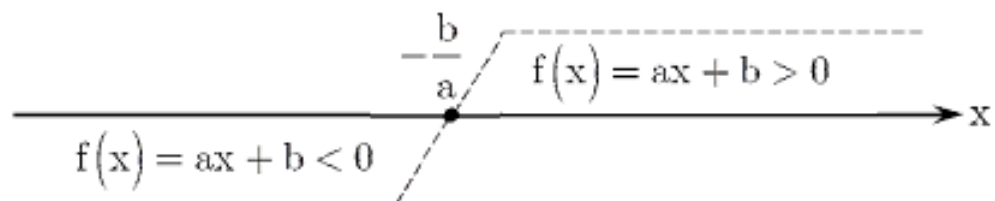
Dấu của nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$

a/ Sử dụng bảng xét dấu (trái trái – phải cùng: với hệ số a)

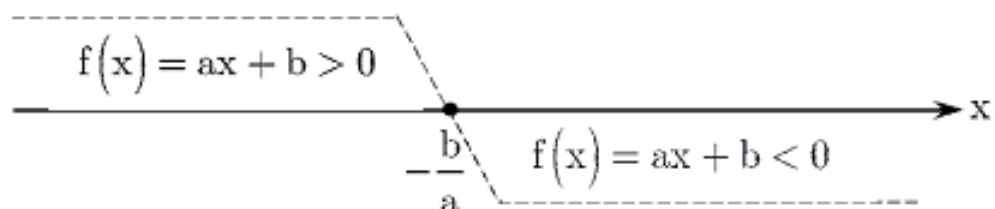
x		$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$	
$f(x) = ax + b$	$a > 0$		-	0	+
	$a < 0$		+	0	-

b/ Sử dụng trục số

• Nếu $a > 0$ thì :



• Nếu $a < 0$ thì :



Bất phương trình tích số

- Dạng: $P(x).Q(x) > 0$ (1) Trong đó: $P(x); Q(x)$ là các nhị thức bậc nhất.
- Phương pháp: Lập bảng xét dấu $P(x).Q(x)$. Từ đó suy ra tập nghiệm của (1)

Bất phương trình chứa ẩn số ở mẫu

- Dạng: $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ (2) Trong đó: $P(x); Q(x)$ là các nhị thức bậc nhất.
- Phương pháp: Lập bảng xét dấu $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Từ đó suy ra tập nghiệm của (2).
- ⊗ Lưu ý: Không nên qui đồng và khử mẫu.

Bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

— Tương tự như giải phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối, ta thường sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của giá trị tuyệt đối để khử dấu giá trị tuyệt đối.

— Dạng 1. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ -g(x) < f(x) < g(x) \end{cases}$

— Dạng 2. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) : \text{có nghĩa} \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) < -g(x) \\ f(x) > g(x) \end{cases}$

Lưu ý: Với $B > 0$, ta luôn có $|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B$ và $|A| > B \Leftrightarrow \begin{cases} A < -B \\ A > B \end{cases}$

Bài 3. Giải các bất phương trình sau:

- a. $(x + 1)(x - 1)(2x + 3) > 0$
- b. $(2x - 7)(4 - 5x) \leq 0$
- c. $\frac{1}{\frac{x-2}{3}-2x} \leq 2$
- d. $\frac{x-3}{x+1} > \frac{x+5}{x-2}$
- e. $\frac{2x+3}{3x+7} \geq \frac{2}{3}$
- f. $\frac{3-2x}{x^2} \geq 0$

Giải hệ bất phương trình: Giải từng bất phương trình trong hệ rồi giao nghiệm.

Bài 4. Giải các hệ bất phương trình sau:

$$1/ \begin{cases} 8x - 5 > \frac{15x - 8}{2} \\ 2(2x - 3) > 5x - \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$2/ \begin{cases} \frac{4x - 5}{7} < x + 3 \\ \frac{3x + 8}{4} > 2x - 5 \end{cases}$$

$$3/ \begin{cases} \frac{4}{3} - 12x \leq x + \frac{1}{2} \\ \frac{4x - 3}{2} < \frac{2 - x}{3} \end{cases}$$

$$4/ \begin{cases} \frac{x}{2} \leq x + \frac{4}{3} \\ \frac{2x - 9}{3} < \frac{19 + x}{2} \end{cases}$$

$$5/ \begin{cases} \frac{11 - x}{2} \geq 2x - 5 \\ 2(3x + 1) \geq \frac{x - 8}{2} \end{cases}$$

$$6/ \begin{cases} 15x - 2 > 2x + \frac{1}{3} \\ 2(x - 4) < \frac{3x - 14}{2} \end{cases}$$

Bài 5. Giải các bất phương trình sau:

a. $|4 - 3x| \leq 8$ b. $|2x + 1| \geq 3$ c. $|2x + 4| \leq x + 12$

d. $|1 - 4x| < 2x + 1$ e. $|x| < \frac{4}{x}$ f. $|x - 2| \leq \frac{x + 1}{2}$

g. $|2x + 1| \leq x$ h. $\left| \frac{2x - 1}{x - 1} \right| \geq 2$ i. $\frac{|x - 1|}{x + 1} < 1$

Bài 6. Tìm m để các bất phương trình sau vô nghiệm:

1/ $m^2x + 4m - 3 < x + m^2$.

2/ $m^2x + 1 \geq m + (3m - 2)x$.

3/ $mx - m^2 > mx - 4$.

4/ $3 - mx < 2(x - m) - (m + 1)^2$.

Bài 7. Giải và biện luận các bất phương trình sau:

1/ $m(x - m) \leq x - 1$.

2/ $mx + 6 > 2x + 3m$.

3/ $(m + 1)x + m < 3m + 4$.

4/ $mx + 1 > m^2 + x$.

5/ $\frac{m(x - 2)}{6} + \frac{x - m}{3} > \frac{x + 1}{2}$.

6/ $3 - mx < 2(x - m) - (m + 1)^2$.

7/ $mx - m^2 > 2x - 4$.

8/ $x + 2m > 2 + mx$.

27/ $\frac{x - 4m}{2 - x} > 0.$

28/ $\frac{x - 4m}{4 - x} \leq 0.$

29/ $(x + m)(x + 1 - m) > 0.$

30/ $(2x - m)(x + 2 - m) \leq 0.$

31/ $\frac{m - x}{m + 2 + x} \leq 0.$

32/ $\frac{x + 4m}{2x - m + 4} > 0.$

33/ $m^2(x - 1) < m - 4mx - 3x.$

34/ $\frac{2x + m - 1}{x + 1} > 0.$

35/ $\frac{mx - m + 1}{x - 1} < 0.$

36/ $\sqrt{x - 1}(x - m + 2) > 0.$

Dấu của tam thức bậc hai

$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

$\Delta < 0$	$a.f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$: $f(x)$ cùng dấu với $a.$
$\Delta = 0$	$a.f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$: $f(x)$ cùng dấu với $a.$
$\Delta > 0$	$a.f(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2)$: Trong trái.
	$a.f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$: Ngoài cùng.

Giải bất phương trình bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$ [hay $f(x) < 0; f(x) \leq 0; f(x) \geq 0$]

- **Bước 1.** Cho $f(x) = 0$ tìm nghiệm $x_1; x_2$ (nếu có).
- **Bước 2.** Lập bảng xét dấu của $f(x)$ dựa vào dấu của tam thức bậc hai.
- **Bước 3.** Từ bảng xét dấu, suy ra tập nghiệm của bất phương trình.

Giải bất phương trình bậc hai dạng: $f(x).g(x) > 0$ hoặc $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ [hay $< 0; \leq 0; \geq 0$]

- **Bước 1.** Tìm điều kiện xác định D_1 nếu có.
- **Bước 2.** Cho $f(x) = 0; g(x) = 0$ tìm nghiệm $x_i \ (i = 1 \div n).$
- **Bước 3.** Lập bảng xét dấu $f(x); g(x) \Rightarrow$ Dấu của $f(x).g(x)$ và $\frac{f(x)}{g(x)}$.
- **Bước 4.** Từ bảng xét dấu \Rightarrow tập nghiệm S_1 . Vậy tập nghiệm bất phương trình: $S = D_1 \cap S_1.$

Giải hệ bất phương trình bậc hai một ẩn dạng: $\begin{cases} f(x) = ax^2 + bx + c > 0 & (1) \\ g(x) = a'x^2 + b'x + c' > 0 & (2) \end{cases}$

- **Bước 1.** Giải (1), (2) được tập nghiệm tương ứng là $S_1, S_2.$
- **Bước 2.** Nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2.$

Bài 8. Giải các bất phương trình sau:

- | | |
|---|--|
| 1/ $x^2 - 4x + 3 \geq 0.$ | 2/ $-2x^2 + 5x - 3 \geq 0.$ |
| 3/ $7x^2 - 4x - 3 < 0.$ | 4/ $-x^2 + 6x - 9 > 0.$ |
| 5/ $3x^2 + x + 1 \geq 0.$ | 6/ $-x^2 + 7x - 10 \leq 0.$ |
| 7/ $2x^2 + 4x + 3 < 0.$ | 8/ $2x^2 - 5x + 2 \leq 0.$ |
| 9/ $-5x^2 + 4x + 12 < 0.$ | 10/ $16x^2 + 40x + 25 > 0.$ |
| 11/ $-2x^2 + 3x - 7 \geq 0.$ | 12/ $3x^2 - 4x + 4 \geq 0.$ |
| 13/ $x^2 - x - 6 \leq 0.$ | 14/ $\frac{-3x^2 - x + 4}{x^2 + 3x + 5} > 0.$ |
| 15/ $\frac{4x^2 + 3x - 1}{x^2 + 5x + 7} > 0.$ | 16/ $\frac{5x^2 + 3x - 8}{x^2 - 7x + 6} < 0.$ |
| 17/ $\frac{x^2 + 4x + 4}{2x^2 - x - 1} < 0.$ | 18/ $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 4x - 5} \leq 0.$ |
| 19/ $\frac{x^2 - 7x + 12}{2x^2 + 4x + 5} > 0.$ | 20/ $\frac{(2 - x^2)(x^2 - 2x + 1)}{-x^2 + 3x + 4} > 0.$ |
| 21/ $\frac{x^4 - 4x^3 + 2x^2}{x^2 - x - 30} > 0.$ | 22/ $\frac{x^2 + 6x - 7}{x + 7} < 0.$ |
| 23/ $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \geq 0.$ | 24/ $\frac{x^2 - 7x + 10}{-x^2 + 6x - 9} \leq 0.$ |

Bài 9. Giải các bất phương trình sau:

- | | |
|--|--|
| 7/ $\frac{x + 1}{(x - 1)^2} < 1.$ | 8/ $\frac{x - 1}{x + 1} < x.$ |
| 9/ $x \leq \frac{6}{x - 5}.$ | 10/ $\frac{1}{x + 2} < \frac{3}{x - 3}.$ |
| 11/ $\frac{14x}{x + 1} < \frac{9x - 30}{x - 4}.$ | 12/ $\frac{2(x - 4)}{(x - 1)(x - 7)} \geq \frac{1}{x - 2}.$ |
| 13/ $\frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x - 1} > \frac{1}{x}.$ | 14/ $\frac{1}{x + 1} + \frac{2}{x + 3} < \frac{3}{x + 2}.$ |
| 15/ $\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x} \leq \frac{2}{x + 2}.$ | 16/ $\frac{x - 1}{x} - \frac{x + 1}{x - 1} < 2.$ |
| 17/ $\frac{(x - 2)(x - 4)(x - 7)}{(x + 2)(x + 4)(x + 7)} > 1.$ | 18/ $\frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)} > 1.$ |
| 19/ $(x^2 - 2x)(2x - 2) - \frac{18x - 18}{x^2 - 2x} \leq 0.$ | 20/ $(x^2 + 3x)(2x + 3) - \frac{32x + 48}{x^2 + 3x} \geq 0.$ |

Bài 10. Giải các bất phương trình sau:

1/ $x^4 - 5x^2 + 4 < 0.$

2/ $x^4 - 2x^2 - 63 \leq 0.$

3/ $x^4 - 3x^2 + 2 > 0.$

4/ $x^6 + 19x^3 - 216 \geq 0.$

5/ $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) \geq 5.$

6/ $(x^2 - x - 1)(x^2 - x - 7) < -5$

7/ $x^2 + (x + 1)^2 \leq \frac{15}{x^2 + x + 1}.$

8/ $1 + \frac{12}{x^2} < \frac{7}{x}.$

Bài 11. Giải các hệ bất phương trình sau:

9/
$$\begin{cases} 2x^2 - (2\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3} - 1 \leq 0 \\ 5x^2 - 8x + 3 < 0 \end{cases}.$$

10/
$$\begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{cases}.$$

11/
$$\begin{cases} 2x^2 + x - 6 > 0 \\ 3x^2 - 10x + 3 \geq 0 \end{cases}.$$

12/
$$\begin{cases} -2x^2 - 5x + 4 < 0 \\ -x^2 - 3x + 10 > 0 \end{cases}.$$

13/
$$\begin{cases} -x^2 + 4x - 7 < 0 \\ x^2 - 2x - 1 \geq 0 \end{cases}.$$

14/
$$\begin{cases} x^2 + x + 5 < 0 \\ x^2 - 6x + 1 > 0 \end{cases}.$$

15/
$$\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0 \\ x^2 + x - 20 < 0 \end{cases}.$$

16/
$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 0 \\ -x^2 + 2x + 3 > 0 \end{cases}.$$

⊙ Phương trình – Bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

- Để giải phương trình, bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối, ta thường sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của giá trị tuyệt đối để khử dấu giá trị tuyệt đối.
- Xem lại cách giải phương trình trị tuyệt đối (Chương 3. Phương trình và hệ phương trình).

a/ Dạng 1. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \\ g(x) \geq 0 \\ \begin{cases} f(x) < -g(x) \\ f(x) > g(x) \end{cases} \end{cases}$

b/ Dạng 2. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ -g(x) < f(x) < g(x) \end{cases}$

c/ Dạng 3. $|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow [f(x) - g(x)][f(x) + g(x)] > 0$

🔍 Lưu ý

◇ $|A| = A \Leftrightarrow A \geq 0.$

◇ $|A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0.$

◇ Với $B > 0$, ta có: $|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B$ và $|A| > B \Leftrightarrow \begin{cases} A < -B \\ A > B \end{cases}.$

◇ $|A + B| = |A| + |B| \Leftrightarrow AB \geq 0.$

◇ $|A - B| = |A| + |B| \Leftrightarrow AB \leq 0.$

② Phương trình – Bất phương trình chứa ẩn trong dấu căn

- Để giải phương trình, bất phương trình chứa ẩn trong dấu căn ta thường dùng phép nâng lũy thừa hoặc đặt ẩn phụ để khử dấu căn.
- Xem lại cách giải phương trình có dấu căn (Chương 3. Phương trình và hệ phương trình).

$$\text{a/ Dạng 1. } \sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

$$\text{b/ Dạng 2. } \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$$

$$\text{c/ Dạng 3. } \sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$$

⚡ **Lưu ý:** Đối với các phương trình, bất phương trình, không có dạng chuẩn như lí thuyết, ta thực hiện:

◇ **Bước 1.** Đặt điều kiện cho căn có nghĩa.

◇ **Bước 2.** Chuyển về sao cho 2 vế đều không âm.

◇ **Bước 3.** Bình phương 2 vế để khử căn.

Bài 12. Giải các bất phương trình sau:

$$1/ \sqrt{x-1} \geq 1.$$

$$2/ \sqrt{2x-1} \geq 2.$$

$$3/ \sqrt{4x+2} \geq 3.$$

$$4/ \sqrt{x-3} \leq 1.$$

$$5/ \sqrt{x-2} \leq x-4.$$

$$6/ \sqrt{2x+1} \geq 1-3x.$$

$$7/ \sqrt{2x-1} \leq x.$$

$$8/ 5\sqrt{5x-2} \geq x+4.$$

$$9/ \sqrt{2x^2+x+6} \leq 2(x+2).$$

$$10/ \sqrt{x^2-x+2} \geq x-3.$$

$$11/ 2\sqrt{x^2+x-2} \leq 1+2x.$$

$$12/ \sqrt{x^2-1} \geq \sqrt{2x^2+2x}.$$

$$13/ \sqrt{x+2} \leq \sqrt{3x^2-x+1}.$$

$$14/ \sqrt{2x-1} \geq \sqrt{x+3}.$$

$$33/ \sqrt{x+2} \leq |x|.$$

$$34/ \sqrt{x^2+x-6} < x-1.$$

$$35/ \sqrt{2x-1} \leq 2x-3.$$

$$36/ \sqrt{x^2+8x} \leq 2(x+1).$$

$$37/ \sqrt{x^2+9x} > x+4.$$

$$38/ \sqrt{2x^2-1} > 1-x.$$

$$39/ \sqrt{x^2-4x-12} > x-4.$$

$$40/ \sqrt{x^2-5x-14} \geq 2x-1.$$

Bài 13. Tìm m để $f(x)$ luôn dương với mọi x :

$$1/ f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m + 1.$$

$$2/ f(x) = mx^2 - 2(m-1)x + 4m.$$

$$3/ f(x) = (m-1)x^2 - (m-5)x + m - 1.$$

$$4/ f(x) = (m^2+1)x^2 + 2(m+3)x + 1.$$

$$5/ f(x) = (3m+1)x^2 - (3m+1)x + m + 4.$$

$$6/ f(x) = (m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3.$$

Bài 14. Tìm m để $f(x)$ luôn âm:

1/ $f(x) = -2x^2 + 2(m-2)x + m - 2$. 2/ $f(x) = (m+4)x^2 - (m-1)x - 1 - 2m$

3/ $f(x) = (m-1)x^2 + 2(m+2)x + m - 6$. 4/ $f(x) = (m-2)x^2 + 2(m-2)x + 2$.

5/ $f(x) = (m^2 + 4m - 5)x^2 - 2(m-1)x + 2$. 6/ $f(x) = (m-4)x^2 + (m+1)x + 2m - 1$.

Bài 15. Tìm m để bất phương trình có nghiệm:

1/ $mx^2 + 2(m+1)x + m - 2 \leq 0$. 2/ $(m+2)x^2 + 2(m+2)x + m + 4 \geq 0$.

3/ $(m-2)x^2 + 2(m-2)x + 2 \leq 0$. 4/ $(m-1)x^2 + 2(m+2)x + m - 6 \leq 0$.

5/ $-2x^2 + 2(m-2)x + m - 2 < 0$. 6/ $-x^2 + 3x - m + 1 < 0$.

7/ $x^2 + (m-2)x - 8m + 1 \geq 0$. 8/ $(m^2 + 1)x^2 + 2(m+3)x + 1 \geq 0$.

B. HÌNH HỌC

Bài 16. Làm kĩ các bài tập Hình học trong mặt phẳng Oxy đã giao kì trước.

Đó là các bài toán căn bản đối với chủ đề Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng Oxy .