HÀM SỐ LIÊN TỤC

DẠNG 3: CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

Phương pháp giải: Để chứng minh phương trình có nghiệm bằng cách sử dụng tính liên tục của hàm số, ta thực hiện các bước sau

- ✓ B1: Biến đổi phương trình về dạng $f\left(x\right)=0$.
- ✓ B2: Tìm hai số a và b $\left(a<b\right)$ sao cho $f\left(a\right).f\left(b\right)<0$.
- ✓ B3: Chứng minh hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$.

Từ đó suy ra phương trình $f\left(x\right)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $\left(a;b\right)$.

1. **Trường hợp 1:** Phương trình không chứa tham số m.

(Casio hỗ trợ việc tìm hai số a và b $\left(a<b\right)$ sao cho $f\left(a\right).f\left(b\right)<0$).

Ví dụ 1: Chứng minh rằng phương trình $4x^3-8x^2+1=0$ có nghiệm trong khoảng $\left(-1;2\right)$.

Lời giải

Đặt $f\left(x\right)=4x^3-8x^2+1$.

+ Ta có $f\left(-1\right)=-11$, $f\left(2\right)=1$ nên $f\left(-1\right).f\left(2\right)<0$

+ Hàm số $f\left(x\right)=4x^3-8x^2+1$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\left[-1;2\right]$.

Vậy phương trình $4x^3-8x^2+1=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $\left(-1;2\right)$ nên phương trình có nghiệm trong khoảng $\left(-1;2\right)$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng phương trình $4x^4+2x^2-x-3=0$ có ít nhất 2 nghiệm trong khoảng $\left(-1;1\right)$.

Lời giải

Đặt $f\left(x\right)=4x^4+2x^2-x-3$.

+ Hàm số $f\left(x\right)=4x^4+2x^2-x-3$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\left[-1;0\right]$, $\left[0;1\right]$.

+ Ta có $f\left(-1\right)=4$, $f\left(0\right)=-3$, $f\left(1\right)=2$

Vì $f\left(-1\right).f\left(0\right)<0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(-1;0\right)$.

Vì $f\left(0\right).f\left(1\right)<0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(0;1\right)$.

Mà $\left(-1;0\right)$ và $\left(0;1\right)$ là hai khoảng phân biệt.

Vậy phương trình $4x^4+2x^2-x-3=0$ có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $\left(-1;1\right)$.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng phương trình $x^5-5x^3+4x-1=0$ có đúng 5 nghiệm.

Lời giải

Đặt $f\left(x\right)=x^5-5x^3+4x-1$.

+ Hàm số $f\left(x\right)=x^5-5x^3+4x-1=x\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)-1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

+ Ta có $f\left(-2\right)=-1<0$, $f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{105}{32}-1=\frac{73}{32}>0$, $f\left(-1\right)=-1<0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{45}{32}-1=\frac{13}{32}>0$, $f\left(1\right)=-1<0$, $f\left(3\right)=119>0$.

Vì $f\left(-2\right).f\left(-\frac{3}{2}\right)<0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$.

Vì $f\left(-\frac{3}{2}\right).f\left(-1\right)<0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{3}{2};-1\right)$.

Vì $f\left(-1\right).f\left(\frac{1}{2}\right)<0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Vì $f\left(\frac{1}{2}\right).f\left(1\right)<0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Vì $f\left(1\right).f\left(3\right)<0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(1;3\right)$

Do các khoảng $\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$; $\left(-\frac{3}{2};-1\right)$; $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2};1\right)$; $\left(1;3\right)$ không giao nhau nên phương trình có ít nhất 5 nghiệm.

Mà phương trình đã cho là phương trình bậc 5 có không quá 5 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm.

2. **Trường hợp 2:** Phương trình chứa tham số m.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng phương trình $m\left(x-1\right)^3\left(x-2\right)+2x-3=0$ có nghiệm trong khoảng $\left(1;2\right)$.

Lời giải

Đặt $f\left(x\right)=m\left(x-1\right)^3\left(x-2\right)+2x-3$.

+ Ta có $f\left(1\right)=-1$, $f\left(2\right)=1$ nên $f\left(1\right).f\left(2\right)<0$.

+ Hàm số $f\left(x\right)=m\left(x-1\right)^{3}\left(x-2\right)+2x-3$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\left[1;2\right]$.

Vậy phương trình $m\left(x-1\right)^{3}\left(x-2\right)+2x-3=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $\left(1;2\right)$.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng phương trình $m^2x^4+2mx^3+3x-1=0$ có nghiệm trong khoảng $\left(0;1\right)$.

Lời giải

Đặt $f\left(x\right)=m^2x^4+2mx^3+3x-1$.

+ Ta có: $\begin{cases} f\left(0\right)=-1 \\ f\left(1\right)=m^2+2m+2=\left(m+1\right)^2+1>0,\forall m \end{cases}$ nên $f\left(0\right).f\left(1\right)<0$.

+ Hàm số $f\left(x\right)=m^2x^4+2mx^3+3x-1$ liên tục trên $\mathbb{R}$ hàm số nên liên tục trên $\left[0;1\right]$.

Vậy phương trình $m^2x^4+2mx^3+3x-1=0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $\left(0;1\right)$ suy ra phương trình có nghiệm trong khoảng $\left(0;1\right)$.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng phương trình $\left(1-m^2\right)x^5-3x-1=0$ luôn có nghiệm.

Lời giải

Đặt $f\left(x\right)=\left(1-m^2\right)x^5-3x-1$.

+ Hàm số $f\left(x\right)=\left(1-m^2\right)x^5-3x-1$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục trên $\left[-1;0\right]$.

+Ta có: $f\left(0\right)=-1$

$f\left(-1\right)=m^2+1>0,\forall m$ nên $f\left(0\right).f\left(-1\right)<0$

Vậy phương trình $\left(1-m^2\right)x^5-3x-1=0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $\left(-1;0\right)$ nên phương trình luôn có nghiệm.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng phương trình: $\left(m^2+m+1\right)x^4+2x-2=0$ luôn có nghiệm

Lời giải

Đặt $f\left(x\right)=\left(m^2+m+1\right)x^4+2x-2$.

+ Hàm số $f\left(x\right)=\left(m^2+m+1\right)x^4+2x-2$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục trên $\left[0;1\right]$.

+ Ta có

$f\left(0\right)=-2$

$f\left(1\right)=m^2+m+1=\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,\forall m$

Nên $f\left(0\right).f\left(1\right)<0$

Vậy phương trình $\left(m^2+m+1\right)x^4+2x-2=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $\left(0;1\right)$ nên phương trình luôn có nghiệm.

Ví dụ 8: Chứng minh rằng phương trình $\left(m^2+1\right)x^3-2m^2x^2-4x+m^2+1=0$ luôn có 3 nghiệm.

Lời giải

Đặt $f\left(x\right)=\left(m^2+1\right)x^3-2m^2x^2-4x+m^2+1$.

+ Hàm số $f\left(x\right)=\left(m^2+1\right)x^3-2m^2x^2-4x+m^2+1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

+ Ta có: $f\left(x\right)=m^2\left(x^3-2x^2+1\right)+x^3-4x+1$

$f\left(-3\right)=-44m^2-14<0;\ \forall m$

$f\left(0\right)=m^2+1>0,\forall m$

$f\left(1\right)=-2$

$f\left(2\right)=m^2+1>0;\ \forall m$

Vì $f\left(-3\right).f\left(0\right)<0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(-3;0\right)$.

Vì $f\left(0\right).f\left(1\right)<0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(0;1\right)$.

Vì $f\left(1\right).f\left(2\right)<0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(1;2\right)$.

Vậy phương trình $\left(m^2+1\right)x^3-2m^2x^2-4x+m^2+1=0$ có ít nhất 3 nghiệm trong khoảng $\left(-3;2\right)$, mà phương trình đã cho là bậc 3 nên phương trình có đúng 3 nghiệm.

3. Trường hợp 3: Chứng minh phương trình bậc hai luôn có nghiệm khi cho đẳng thức liên hệ giữa các hệ số.

Ví dụ 9: Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $12a+15b+20c=0$. Chứng minh phương trình $ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm thuộc $\left[0;\frac{4}{5}\right]$.

Lời giải

Xét hàm số $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$.

+ Hàm số $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

+ Ta có $f\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{16}{25}a+\frac{4}{5}b+c$ nên $\frac{75}{4}f\left(\frac{4}{5}\right)=12a+15b+\frac{75}{4}c$.

$f\left(0\right)=c$ nên $\frac{5}{4}f\left(0\right)=\frac{5}{4}c$.

Do đó $\frac{75}{4}f\left(\frac{4}{5}\right)+\frac{5}{4}f\left(0\right)=12a+15b+20c=0$.

Suy ra $f\left(\frac{4}{5}\right)$, $f\left(0\right)$ trái dấu hoặc cả hai đều bằng 0.

Vậy phương trình $ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm thuộc $\left[0;\frac{4}{5}\right]$.

Ví dụ 10: Cho 3 số a, b, c thực thỏa mãn $5a+4b+6c=0$. Chứng minh phương trình $ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm.

Lời giải

Xét hàm số $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$.

+ Hàm số $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

+ Ta có $f\left(0\right)=c$, $f\left(2\right)=4a+2b+c$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c$

Do đó $f\left(0\right)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(2\right)=5a+4b+6c=0$

Suy ra tồn tại hai giá trị p, q sao cho $f\left(p\right).f\left(q\right)\le 0$.

Vậy phương trình $ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Chứng minh rằng phương trình:

1) $3x^2+2x-2=0$ có ít nhất một nghiệm
2) $x^3+x+1=0$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1.
3) $3x^3+2x-2=0$ có ít nhất một nghiệm
4) $4x^4+2x^2-x-3=0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt thuộc $(-1;\ 1)$
5) $x^5+x-1=0$ có ít nhất ba nghiệm thuộc $(-1;\ 1)$
6) $x^3-3x+1=0$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt thuộc $(-2;\ 2)$
7) $2x^3-6x+1=0$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt thuộc $(-2;\ 2)$
8) $2x^4-3x+5x-6=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $\left(1;\ 2\right)$
9) $x^3-3x-7=0$ luôn có nghiệm
10) $x^5+7x^4-3x^2+x+2=0$ luôn có nghiệm
11) $x^4-3x-5=0$ luôn có nghiệm
12) $x^4-3x^3+1=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1;\ 3)$
13) $x^5-3x^4+5x-2=0$ có ít nhất ba nghiệm thuộc $(-2;\ 5)$
14) $\sqrt{x^3+6x+1}-2=0$ có nghiệm dương
15) $\cos 2x=2\sin x-2$ có ít nhất hai nghiệm thuộc $\left(-\dfrac{\pi}{6}\ ;\ \pi\right)$
16) $x^2\cos x+x\sin x+1=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;\pi)$
17) $\cos x=x$ luôn có nghiệm

Bài 2. Chứng minh các phương trình sau có nghiệm:

1) $m\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)+2x+3=0$
2) $\cos x+m\cos 2x=0$
3) $\sin x+\cos x-m\sin x\cos x=0$
4) $2x-1+\tan x=0$
5) $\left(m^2+m+1\right)x^4+2x-2=0$
6) $\left(1-m^2\right)\left(x+1\right)^3+x^2-x-3=0$
7) $m(2\cos x-\sqrt{2})=2\sin 5x+1$
8) $a\left(x-b\right)\left(x-c\right)+b\left(x-c\right)\left(x-a\right)+c\left(x-b\right)\left(x-b\right)=0$